UNISAL

Homailson Lopes Passos

Um estudo sobre o pensamento algébrico com alunos do segundo grau

Lorena
2011

UNISAL

Homailson Lopes Passos

Um estudo sobre o pensamento algébrico com alunos do segundo grau

Relatório Final apresentado como exigência das Atividades de Estágio Curricular Supervisionado e Produção Acadêmica no Ensino Médio, do Curso de Licenciatura em Matemática, do Centro Universitário Salesiano de São Paulo, sob a orientação do professor Ronaldo Nogueira Rodrigues

Lorena
2011

Resumo

A compreensão da Álgebra baseia-se na capacidade de abstração. Como ciência, dispõe de um sistema de linguagem capaz de expressar e articular a generalidade. No âmbito científico-tecnológico, linguagens são parte de um campo comum a toda a ciência e tecnologia (PCNEM, 2006). A aptidão para manipular a linguagem algébrica é importante no desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e a ausência desta faculdade poderá ocasionar um bloqueio na compreensão da Matemática e sua aplicabilidade. Diante disso, o objetivo desta pesquisa é estudar a capacidade que os alunos do ensino médio têm para generalizar situações particulares, analisando quantitativa e qualitativamente se a habilidade de abstração possui deficiência. Participaram deste trabalho alunos do segundo ano do ensino médio matriculados em uma escola privada da cidade de Lorena (SP). Foram submetidos a um teste com 8 questões dissertativas, com resposta única, que avaliou a destreza para cumprir o objetivo proposto. Após a aplicação das questões, os dados foram tratados através de métodos estatísticos descritivos e exibidos na forma de gráficos e tabelas; por fim, foram discutidos e as conclusões apresentadas.

Sumário

Índice de Figuras

Índice de tabelas

1. Introdução

A Álgebra é uma parte da Matemática lecionada em praticamente todas as escolas do Brasil. O ensino-aprendizagem desta disciplina é de suma importância para o desenvolvimento do raciocínio abstrato e lógico-matemático dos alunos. Não é somente utilizada dentro das salas de aulas, mas também é ferramenta de trabalho para engenheiros, físicos, programadores de computador e muitos outros estudiosos. Isto demonstra a importância que se tem em conhecer seu conteúdo e sua aplicabilidade, sendo ela o produto final de vários anos de evolução pela qual a Matemática, desde seu princípio, passou. Logo, deve-se avaliar o nível dessa aprendizagem nas escolas responsáveis por distribuir o conhecimento da Álgebra.

1.1. Breve História da Álgebra

Pode-se afirmar que a Álgebra surgiu da necessidade de generalizar problemas matemáticos comuns, que poderiam ser expressos de maneira única através de símbolos. Os egípcios, babilônios, indianos, sumerianos, chineses, contribuíram enormemente no desenvolvimento da Álgebra. Um exemplo é o achado papiro de Rhind, datado de 1650 a.C., que é na sua essência um documento matemático com a resolução de vários problemas, que já assumiam o caráter algébrico. Encontra-se nele a resolução de problemas que envolvem a distribuição de mercadorias, conduzindo a equações aparentemente simples.

Citado por alguns como o fundador da Álgebra, Diofanto (c. 200-c. 284) é responsável por ter desenvolvido vários métodos de resolução de equações e sistemas de equações num simbolismo conhecido como “sincopado”. A partir daí, problemas que seriam escritos de maneira natural, começaram a ter simplificações, contraindo a forma da escrita através de símbolos. Al-Khwarizmi (790-840) , em um de seus trabalhos, foi o primeiro a utilizar o termo “Álgebra”, para designar a “transposição de termos”, implicitamente na resolução de uma equação.

Vagarosamente vão se descobrindo métodos de resolução para equações do 1º e do 2º grau. Equações de maior grau, até então, tinham somente resoluções particulares. François Viète (1540-1603) introduz uma nova etapa na história da Álgebra, a do simbolismo. Nessa etapa a Álgebra obteve grande evolução.

Os matemáticos italianos contemporâneos ao período renascentista, marcam um dos momentos mais importantes na história da Matemática. Nesta época a Álgebra ultrapassa claramente as principais descobertas da Antiguidade, entrando, por assim dizer, em seu período clássico.

Uma questão fundamental a ser exposta é a resolução das equações algébricas de n graus. Albert Girard (1595-1632), em 1629, em sua obra denominada *Invention nouvelle en l'Algèbre*, é o primeiro matemático a afirmar que uma equação de graus n possui n soluções. Este teorema é atualmente conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e possui várias tentativas de demonstrações, todas elas falhas, dentre os que tentaram estão Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783), d'Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813). Finalmente, a demonstração é feita satisfatoriamente por Argand (1768-1822) e por Gauss (1777-1855) .

Na metade do século XIX a Álgebra evolui drasticamente. Com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existe nenhum método para resolução de equações que possuem grau superior ao 4º, o estudo das equações algébricas se esgota, dando uma nova direção aos matemáticos da época. A partir daí é iniciado o estudo das equações diferenciais. Matemáticos deram início também ao estudo dos grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais, que hoje são os principais temas objetos da “Álgebra moderna”; juntamente com a análise milesimal.

2. Objetivos da pesquisa

O objetivo desta pesquisa é analisar a capacidade que os alunos do ensino médio têm para utilizar a Álgebra na resolução de situações generalizadas. Para isso, aplica-se um questionário com 8 questões dissertativas que demandam aos alunos a utilização do raciocínio algébrico. Através dos resultados obtidos, expressos em gráficos e tabelas, observar quantitativa e qualitativamente se a maioria da amostra populacional compreende a linguagem algébrica, e se sabem como utilizá-la. Analisar a maneira como os alunos resolveram as questões, utilizando ou não a linguagem da Álgebra e apontar os erros mais relevantes, elucidando a possível causa de cada um; da mesma forma, discutir os acertos mais interessantes.

3. Justificativa

A Álgebra moderna, assim como a antiga, tem como característica a generalização de situações particulares, o que reflete como precedente a capacidade de abstração. Desde de seus primórdios, a Álgebra preocupou-se em determinar métodos gerais e rigorosos para as mais variadas situações. É corriqueiro saber que é fundamental o uso de uma notação coerente para o bom desenvolvimento de uma determinada área da matemática (POLCINO MILIES, C.), logo, torna-se necessário o conhecimento desta notação, para que se possa interpretá-la e a manipular. Os simbolismos algébricos utilizados na Grécia, no Egito e Babilônia, todos da antiguidade, resolviam, cada um com seus respectivos métodos, equações do primeiro e segundo grau. Dentre outros vários, este conhecimento, hoje atrelado às salas de aula, foi mesclado e é distribuído aos educandos imparcialmente. Estes alunos, como receptores do saber, deveriam ter, ao saírem do Ensino Médio, uma compreensão parcial sólida da Álgebra e de seu significado, sabendo utilizá-la coerentemente. Porém, nota-se nas escolas em geral, uma defasagem enorme no seu ensino-aprendizagem, o que poderá ocasionar aos alunos um futuro bloqueio em relação à Matemática e sua aplicabilidade.

4. Fundamentação Teórica

Compreender a Álgebra é essencial para o estudante em seu dia-a-dia e para o prosseguimento de seus estudos, portanto todos devem aprender álgebra (NCTM, 2000). Na maioria dos casos, tratando-se do ensino-aprendizagem da Álgebra dentro da sala de aula, a generalização do particular passa do valor numérico para o abstrato (simbólico). Fazer com que o aluno compreenda esse método é o grande “X” da questão. Pesquisadores como (e.g. HERBERT E BROWN, 1997; ORTON E ORTON, 1999) e organizações (e.g. NCTM, 1991, 2000) deram início ao desenvolvimento de técnicas-padrões que fizessem com que os alunos obtivessem sucesso em seu aprendizado, destacando a importância que o ensino-aprendizagem da Álgebra possui.

Há certamente, como constatam a maioria dos professores, um desinteresse maior pelo aprendizado da Matemática. Talvez porque a grande maioria dos educandos veja a Matemática como uma coleção de itens, que em sua maioria, segundo o raciocínio deles, pode ser dispensado por sua inutilidade, o que certamente é uma afirmação falsa, gerada por “misticismo”. DEVLIN (1998) diz:

> (...) ao longo dos anos a matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas mas sim a compreensão de padrões — padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza (p. 206) .

Analisar o desempenho que os alunos possuem em generalizar os padrões naturais compreende em verificar a qualidade do ensino-aprendizagem da Álgebra na sala de aula, estudando se realmente o aluno tem o entendimento de “para que serve” a Álgebra e como aplicá-la.

O raciocínio algébrico alicerça a aprendizagem dos alunos em muitos temas de matemática (M.I.V. Vale, et. al.). Sendo a Álgebra tão importante para o aluno, é inquestionável a necessidade de ter-se uma boa qualidade na aprendizagem da mesma.

5. Metodologia e Materiais

Participaram desta pesquisa alunos do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Lorena (SP), a maioria desses alunos são de classe média-baixa e alta, tendo eles entre 15 e 18 anos de idade. A avaliação do desempenho do raciocínio algébrico foi realizada através da aplicação de um questionário dissertativo contendo 8 questões, com respostas únicas, que fizessem com que os alunos utilizassem o conhecimento da Álgebra adquirido até o momento. O questionário foi aplicado dentro da própria escola concedente.

5.1. Questionário

1) O sucessor de um número é aquele que vem logo depois dele. Por exemplo, o sucessor de sete é oito. Responda:

Qual é o sucessor de um número representado pela letra x ?

2) Escreva um número abaixo que é um a mais do que um múltiplo de 10.

3) As seguintes reduções de preços têm sido avistadas nas lojas:

a) Dois pelo preço de um

b) Compre um e ganhe 25% de desconto no segundo

c) Três pelo preço de dois

Em qual das alternativas a cima acontece o maior desconto?

4) 2^3 é o mesmo que 2x2x2 e 3^5 é o mesmo que 3x3x3x3x3. O que significa x^3 ?

5) Responda usando símbolos a situação:

Um número que quando subtraído 1 o resultado é divisível por 2. Expresse todos os números possíveis.

6) O dobro de 2 é 4. Represente com símbolos o dobro de um número qualquer.

7) Que número é igual à metade de seu quadrado?

8) Num retângulo, a medida de sua base é o dobro da medida da altura. Adicionando 18 à área desse retângulo, obtemos o dobro do seu perímetro. Quanto mede a base desse retângulo?

5.2. Objetivos das questões

O objetivo proposto na questão 1 é avaliar se os alunos conhecem a terminologia "sucessor" de um número, generalizando para o abstrato com a letra *x*.

Na questão de número 2 avalia-se o conhecimento do termo matemático "múltiplo", fazendo com que os alunos deem pelo menos um exemplo da situação requerida, o que demanda a utilização do raciocínio abstrato.

A terceira questão pretende avaliar se os alunos têm noção de como a Álgebra é útil até mesmo em seu dia-a-dia, na realização de compras. Pretende-se fazer com que os alunos realizem cálculo mental em cima de um preço qualquer de um produto, para que eles cheguem em suas conclusões.

A questão de número 4 demanda aos alunos a generalização de uma situação particular, ou seja, a padronização de um sistema comum, no caso a multiplicação de potencias de mesma base.

A quinta questão tem a intenção de verificar se os alunos conseguem equacionar uma situação particular, generalizando para todas as possíveis soluções.

Na sexta questão pretende-se avaliar se os alunos conhecem o termo “dobro” de um número, representado essa casualidade algebricamente.

A questão de número 7 exibe uma equação descrita literalmente. O objetivo é verificar se os alunos têm capacidade de equacionar a situação, utilizando os símbolos da Álgebra, para que possam solucioná-la.

A questão de número 8 avalia o conhecimento dos termos da geometria como “área” e “perímetro” e, também, se conseguem realizar estes cálculos.

6. Aplicação da Pesquisa

A pesquisa foi realizada no dia 18 de outubro de 2011 pelo estagiário em conjunto com o professor supervisor. O local de trabalho foi uma sala de aula concedida pela instituição em questão. Um total de 22 alunos do 2º ano do Ensino Médio responderam o questionário de forma satisfatória, para a tabulação dos dados e a análise estatística descritiva. Após a aplicação, os dados foram tratados e analisados.

7. Resultados Preliminares

As tabelas e gráficos a seguir ilustram os resultados gerais obtidos através da aplicação do questionário.

Tabela 1:

Questões	Acertos	Erros	Em branco
1)	10	11	1
2)	16	5	1
3)	11	11	0
4)	14	7	1
5)	5	15	2
6)	15	6	1
7)	20	2	0
8)	0	12	10

Tabela 1: desempenho do pensamento algébrico em frequência

Figura 1:

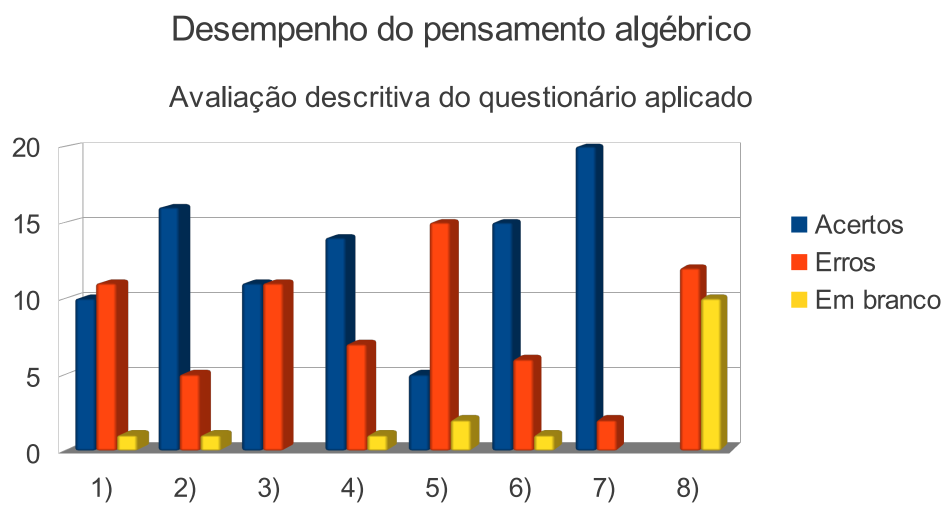


Figura 1: gráfico frequencial do desempenho do raciocínio algébrico

Tabela 2:

Questões	Acertos (%)	Erros (%)	Branco (%)
1)	11%	16%	6%
2)	18%	7%	6%
3)	12%	16%	0%
4)	15%	10%	6%
5)	5%	22%	13%
6)	16%	9%	6%
7)	22%	3%	0%
8)	0%	17%	63%
Total	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 2: desempenho do pensamento algébrico em porcentagem

Figura 2:

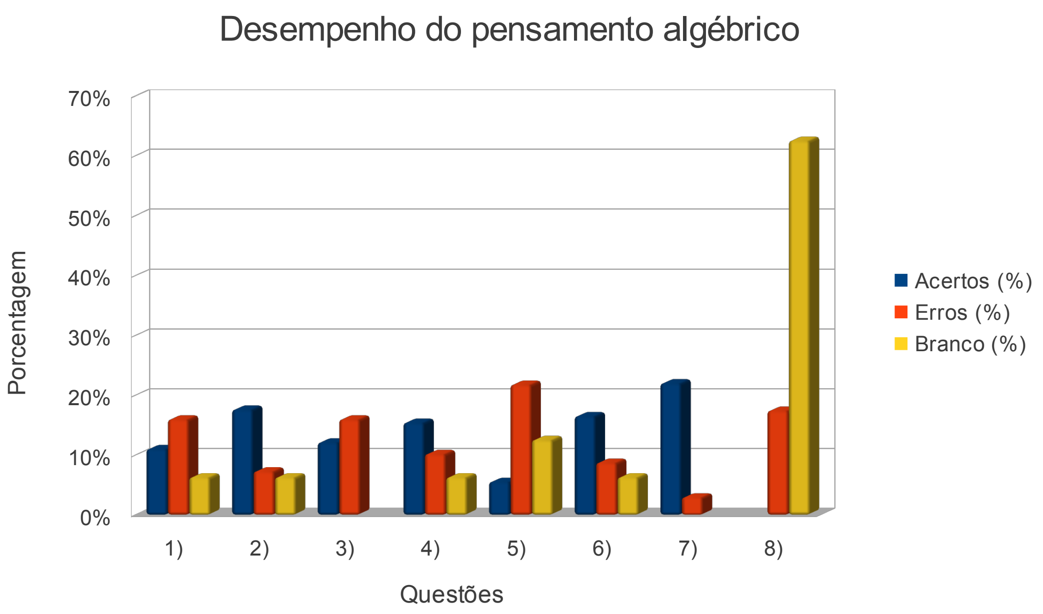


Figura 2: gráfico do desempenho geral em porcentagem

7.1. Porcentagem de erros, acertos e questões deixadas em branco

Figura 3:

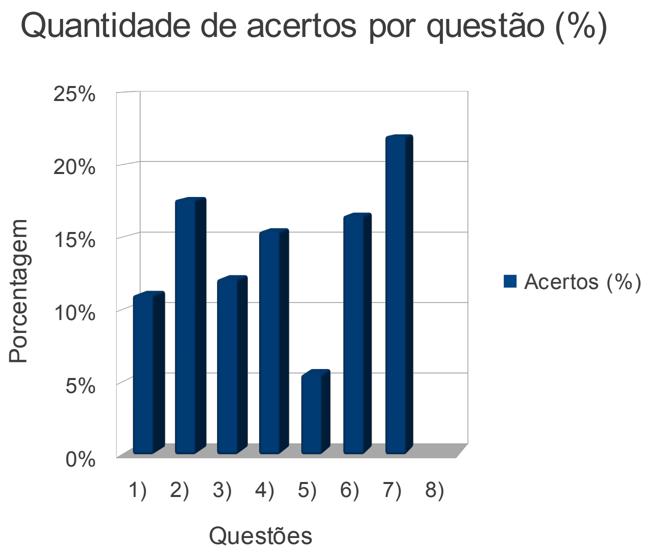


Figura 3: porcentagem de acertos por questão

Figura 4:

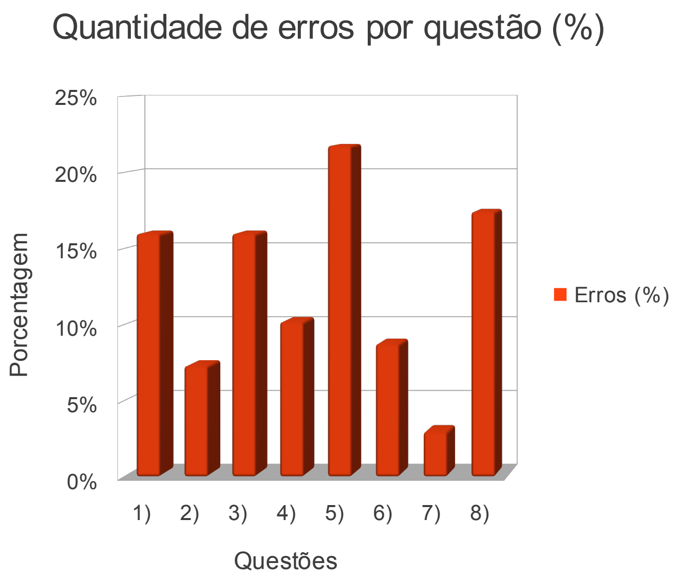


Figura 4: porcentagem de erros por questão

Figura 5:

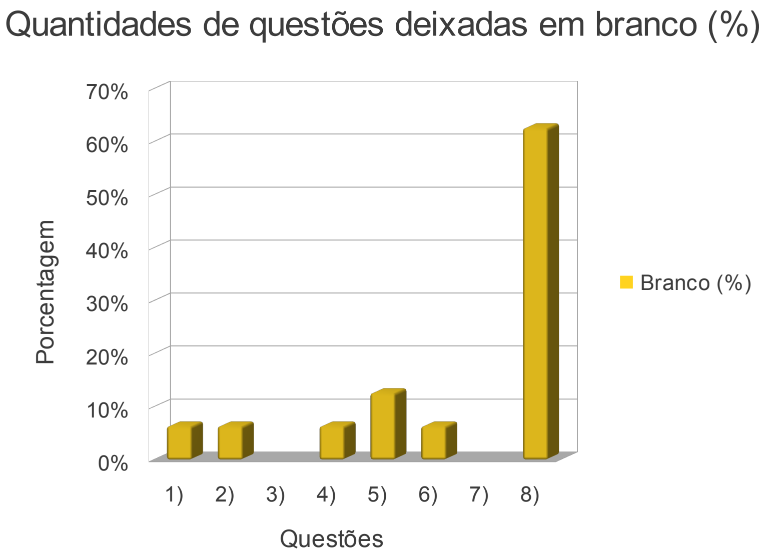


Figura 5: porcentagem de questão deixadas em branco

7.2. Análise específica de cada questão, com erros e acertos mais relevantes

7.2.1. Questão 01

Tabela 3:

Questão 1	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	10	11	1

Tabela 3: resultados da questão 1

Figura 6:

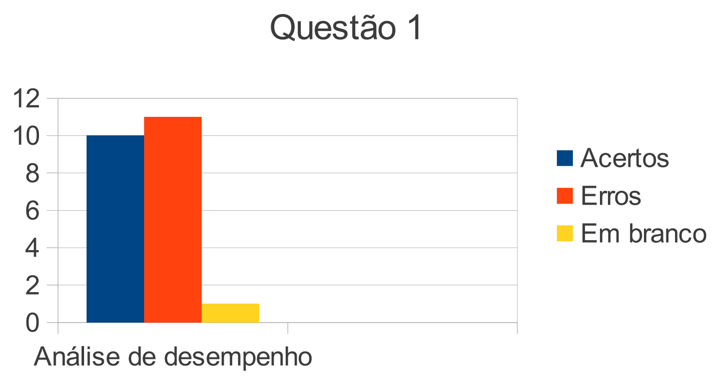


Figura 6: análise da questão 1

Erro relevante:

Figura 7: erro relevante - questão 1

Nesta resposta o aluno identificou y como sendo o sucessor de x, o correto seria $x + 1$.

7.2.2. Questão 02

Tabela 4:

Questão 2	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	16	5	1

Tabela 4: resultados da questão 2

Figura 8:

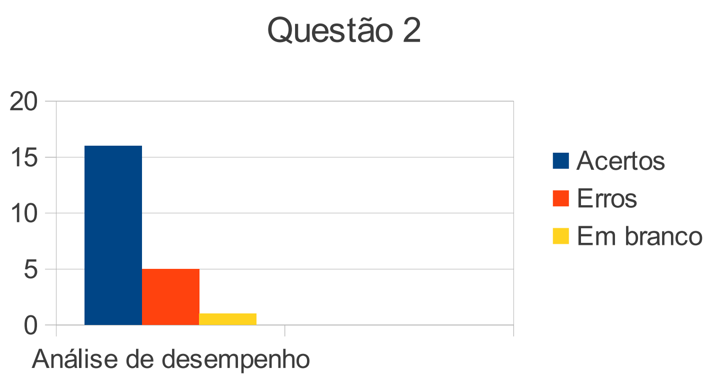
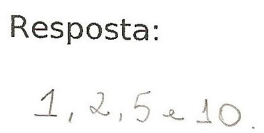


Figura 8: análise da questão 2

Erro relevante:


Resposta:

1, 2, 5 e 10.

Figura 9: erro relevante questão - 2

Nesta resposta o aluno considerou os divisores de 10 como sendo seus múltiplos.

7.2.3. Questão 03

Tabela 5:

Questão 3	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	11	11	0

Tabela 5: resultados da questão 3

Figura 10:

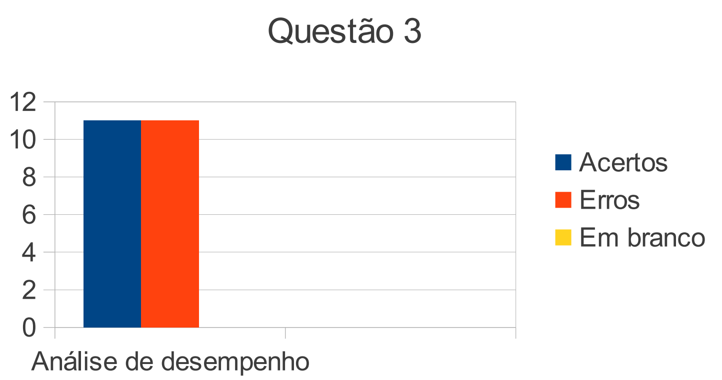


Figura 10: análise da questão 3

7.2.4. Questão 04

Tabela 6:

Questão 4	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	14	7	1

Tabela 6: resultados da questão 4

Figura 11:

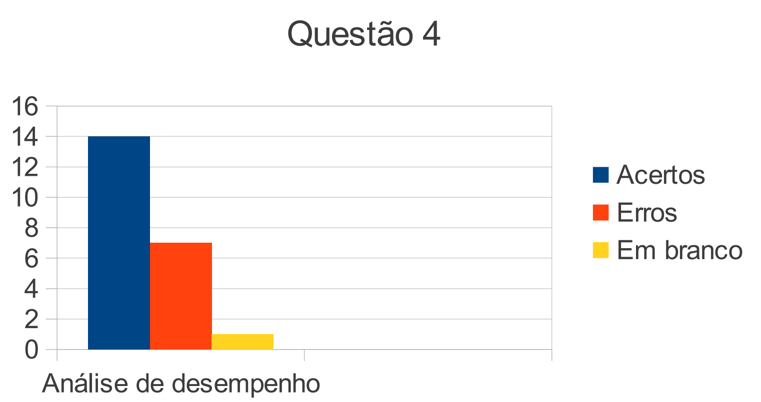


Figura 11: análise da questão 4

Erros relevantes:

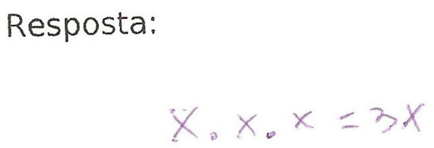


Figura 12: erro relevante - questão 4

Nesta resposta o aluno interpreta a potenciação como sendo a multiplicação.

Figura 13: erro revelante - questão 4

Nesta outra reposta o aluno interpreta a potenciação como sendo a soma de parcelas iguais.

7.2.5. Questão 05

Tabela 7:

Questão 5	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	5	15	2

Tabela 7: resultados da questão 5

Figura 14:

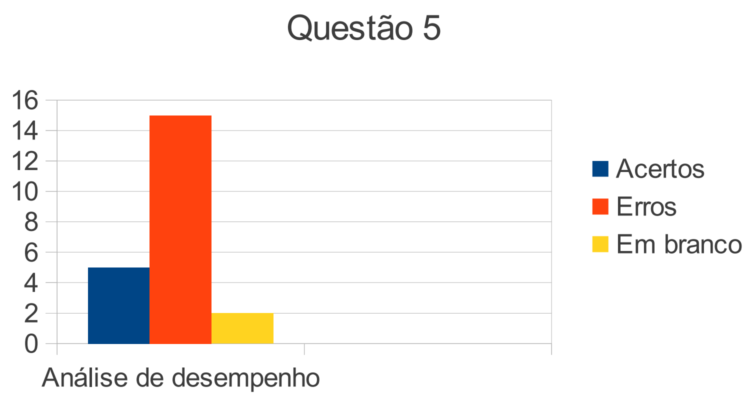


Figura 14 análise da questão 5

Acerto relevante:

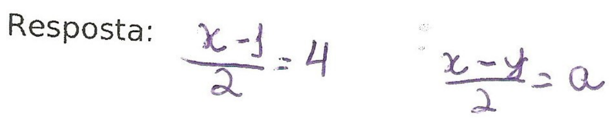


Figura 15: acerto relevante - questão 5

Nesta resposta o aluno demonstra saber como utilizar da linguagem algébrica de maneira correta através da generalização de uma situação em particular.

7.2.6. Questão 06

Tabela 8:

Questão 6	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	15	6	1

Tabela 8: resultados da questão 6

Figura 16:

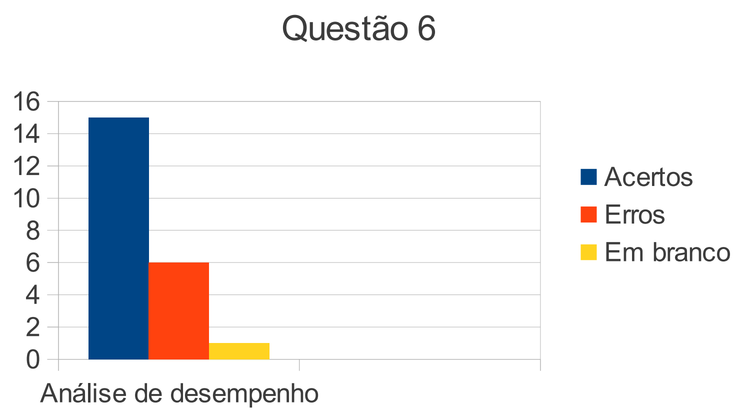


Figura 16: análise da questão 6

Erro relevante:

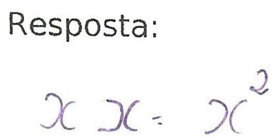


Figura 17: erro relevante - questão 6

Nesta resposta o aluno considera o produto de fatores iguais a x como sendo dobro de x, o correto seria 2x, que representaria o dobro de um número qualquer.

7.2.7. Questão 07

Tabela 9:

Questão 7	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	20	2	0

Tabela 9: resultados da questão 7

Figura 18:

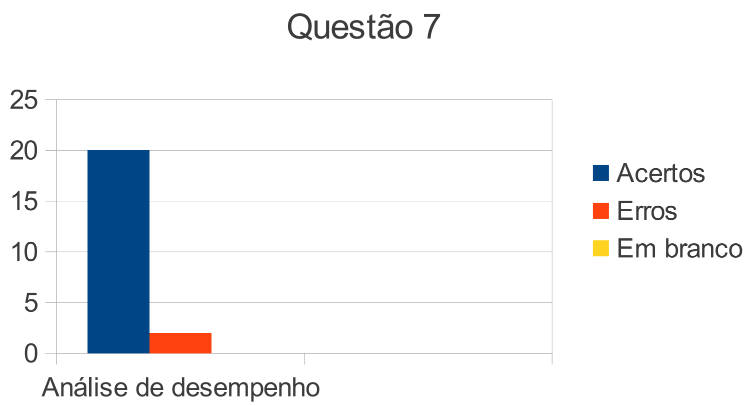


Figura 18: análise da questão 7

7.2.8. Questão 08

Tabela 10:

Questão 8	Acertos	Erros	Em branco
Análise de desempenho	0	12	10

Tabela 10: resultados da questão 8

Figura 19:

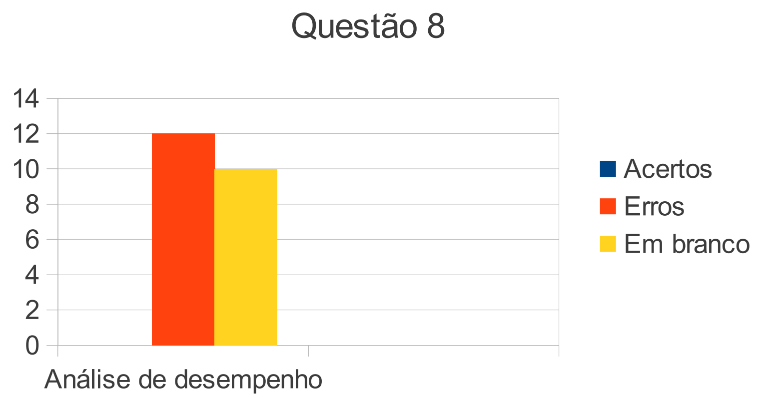


Figura 19: análise da questão 8

Erro relevante:

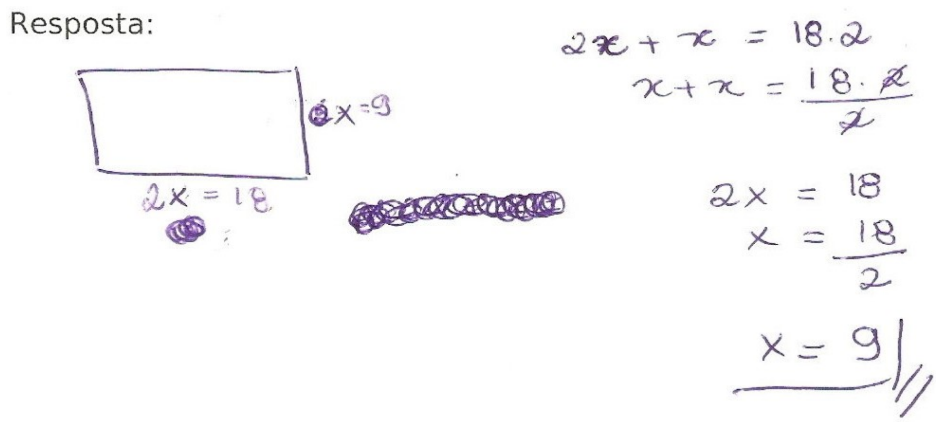


Figura 20: erro relevante - questão 8

Nesta resposta o aluno demonstra não compreender totalmente o conceito da terminologia “perímetro” e, de mesma forma, não sabe como calcular a área de um retângulo. Em contrapartida ele conhece o conceito do dobro de um número.

8. Considerações finais e Conclusão

De acordo com os resultado obtidos, conclui-se que os alunos cometeram maior número de erros na quinta questão, indicando que eles não tem autossuficiência para generalizar situações particulares. Em contrapartida, a questão 7 apresentou o maior número de acertos, o que acarreta dizer que os alunos conseguem raciocinar aritmeticamente, considerando que a maioria resolveu a questão numericamente.

A maior porcentagem de questões deixadas em branco foi avistada na questão oito, que demandava um conhecimento maior sobre a Álgebra em conjunto com a Geometria; nesta questão não houveram acertos. Pode-se concluir, com esse resultado, que os alunos não têm vocabulário matemático suficiente e consequentemente não conseguem interpretar o texto do problema em questão.

Pode-se afirmar, de maneira geral, que os alunos demonstraram um desempenho mediano, ressaltando que a média de acertos foi de 11.4, enquanto que a de erros foi de

8.7. Deste modo, conclui-se que os alunos da amostra populacional não adquiriram o devido conhecimento que deveriam ter sobre a Álgebra, o que pode ocasionar um futuro bloqueio no ensino-aprendizagem da Álgebra e até mesmo a falta de compreensão de sua aplicabilidade.

9. Referências

BRASIL. MINISTÈRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. *Parâmetros Curriculares Nacionais de qualidade para a educação no Ensino Médio*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: Brasília (DF), 2006 v.l; il.

C. POLCINO MILIES, *A Gênese da Álgebra Abstrata, Coleção Tópicos de Matemática Elementar*, IMEUSP, São Paulo, 1987.

DEVLIN, K. Life by the numbers. NY:John Wiley &Sons, Inc, 1998.

DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora, 2002.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, Editora da UNICAMP, 1995.

HERBERT, K. E BROWN, R. *Patterns as tools for algebraic reasoning, Teaching Children Mathematics*, 1997 .

NCTM. *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE, 1991, 2000.

M.I.V. Vale, et. Al. *Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra* . Portugal, 2008.

ORTON, A. *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics.* Londres, Cassell , 1999.